

確率数理工学6

④ 特性関数の性質

Thm (分布関数と特性関数の関係) **重要**

2つの分布関数 F_1, F_2 に対して,

その特性関数を ϕ_1, ϕ_2 とする.

$$F_1 \text{ と } F_2 \text{ が等しい } (F_1(x) = F_2(x) \text{ } (\forall x \in \mathbb{R}))$$

$$\Leftrightarrow \phi_1 \text{ と } \phi_2 \text{ が等しい } (\phi_1(t) = \phi_2(t) \text{ } (\forall t \in \mathbb{R})) //$$

(\Rightarrow は自明, \Leftarrow は非自明)

***** 分布の等しさを、ある関数クラスの期待値の等しさに変換する.

$$\int e^{itx} dF_1(x) = \int e^{itx} dF_2(x) \text{ } (\forall t \in \mathbb{R})$$

⇔ であり、全2つのモーメントが等しいならば、分布が等しいこともわかる。

$$(c.f. \text{ ベクトル } x \text{ と } x' \text{ が等しい} \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = \langle x', y \rangle \text{ } (\forall y \in \mathbb{R}^d))$$

より強く以下のことが言える。

Thm (Lévyの反転公式)

$$P(X \in (a, b)) + \frac{1}{2}(P(X=a) + P(X=b)) \\ = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \frac{e^{-i\zeta b} - e^{-i\zeta a}}{-i\zeta} \phi(\zeta) d\zeta //$$

(c.f. フーリエ逆変換. $P(X \in (a, b))$ が $b > a$ のみならず、両辺 $b > a$ の場合も成り立つ)

Lévyの反転公式の証明

Rを止めた時の右辺の積分

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \left(\frac{e^{-i\xi b} - e^{-i\xi a}}{-i\xi} \right) \left(\int e^{i\xi x} dF(x) \right) d\xi \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int dF(x) \left(\int_{-R}^R \frac{e^{-i\xi(b-x)} - e^{-i\xi(a-x)}}{-i\xi} d\xi \right) \quad (\text{Fubini}) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int dF(x) \int_{-R}^R \left\{ \frac{\cos(\xi(x-b)) - \cos(\xi(x-a))}{-i\xi} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\sin(\xi(x-b)) - \sin(\xi(x-a))}{\xi} \right\} d\xi
 \end{aligned}$$

(注: $\frac{\cos(\xi(x-b)) - \cos(\xi(x-a))}{\xi}$, $\frac{\sin(\xi(x-b)) - \sin(\xi(x-a))}{\xi}$ はともに奇関数)

$\xi \rightarrow 0$ のとき \rightarrow $(x-b)\sin(\xi(x-b)) - (x-a)\sin(\xi(x-a))$ に収束 (ローランド)

∴ $\frac{\cos(\xi(x-b)) - \cos(\xi(x-a))}{\xi}$ は奇関数なので積分は0

∴ $f_R(x) = \int_0^R \frac{\sin(\xi x)}{\xi} d\xi \quad (x \in \mathbb{R})$ とする。

右辺 = $\frac{1}{2\pi} \cdot 2 \int dF(x) (f_R(x-a) - f_R(x-b))$

∴ $\lim_{R \rightarrow \infty} f_R(x) = \begin{cases} \int_0^\infty \frac{\sin(\xi)}{\xi} d\xi = \frac{\pi}{2} & (x > 0) \\ -\frac{\pi}{2} & (x < 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$

∴ $\frac{1}{2\pi} \cdot 2 \cdot \lim_{R \rightarrow \infty} \int f_R(x-a) - f_R(x-b) dF(x)$

= $\frac{1}{\pi} \int \lim_{R \rightarrow \infty} (f_R(x-a) - f_R(x-b)) dF(x)$ (優収束定理)
積分の中身は奇関数

= $\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \int (\mathbb{1}\{x > a\} - \mathbb{1}\{x < a\}) - (\mathbb{1}\{x > b\} - \mathbb{1}\{x < b\}) dF(x)$

= $\frac{1}{2} \int (2 \mathbb{1}\{a < x < b\} + \mathbb{1}\{x = a\} + \mathbb{1}\{x = b\}) dF(x)$

$$= \int \mathbb{1}\{a < x < b\} dF(x) + \frac{1}{2} \int \mathbb{1}\{x=a\} dF(x) + \frac{1}{2} \int \mathbb{1}\{x=b\} dF(x)$$

$$= P(a < X < b) + \frac{1}{2} (P(X=a) + P(X=b))$$

↑ 定義関数の期待値.

分布の性質を調べる代わりに、特性関数の性質を調べればよい.

Thm (独立な確率変数の和の特性関数) **重要!**

X_1, \dots, X_n : 互いに独立な r.v.

$\phi_j(t)$: X_j の特性関数 ($j=1, 2, \dots, n$)

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

S_n の特性関数は

$$\phi(t) = \phi_1(t) \cdot \phi_2(t) \cdot \dots \cdot \phi_n(t)$$

と表わす.

(和の特性関数は、特性関数の積)

Proof

$$\phi(t) = E[e^{it(X_1 + \dots + X_n)}] = E[e^{itX_1} \dots e^{itX_n}]$$

$$= \prod_{i=1}^n E[e^{itX_i}] = \phi_1(t) \times \dots \times \phi_n(t)$$

↑ 独立性

Thm (独立性と特性関数) \leftarrow 特性関数と分布の 1対1対応

X_1, \dots, X_n : r.v.

同時分布の特性関数: $\phi(t_1, \dots, t_n) \stackrel{\text{def}}{=} E[e^{i(t_1 X_1 + \dots + t_n X_n)}]$

ϕ_j : X_j の c.f. (特性関数)

$$X_1, \dots, X_n \text{ が独立} \iff \phi(t_1, \dots, t_n) = \phi_1(t_1) \dots \phi_n(t_n)$$

例

Ex. (二項分布)

$X_i \sim \text{Bernoulli}(\theta)$ ($P(X_i=1)=\theta, P(X_i=0)=1-\theta$)
(i.i.d.)

$S = X_1 + \dots + X_n$ とする.

$\begin{cases} X_i \text{ の特性関数} : \theta e^{it} + (1-\theta) \\ S \text{ の } \quad \quad \quad : (\theta e^{it} + (1-\theta))^n \end{cases}$

← 前回の講義

→ 二項分布の特性関数

$\Rightarrow S \sim B(n, \theta)$ (二項分布)

Ex. (正規分布の和の分布)

X_1, \dots, X_n : r.v., 独立

$X_j \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$

$S_n = X_1 + \dots + X_n$

$\phi(t) = \prod_{j=1}^n \phi_j(t)$

← S_n の c.f. ← X_j の c.f.

$$= \prod_{j=1}^n \exp(it\mu_j - \frac{1}{2}\sigma_j^2 t^2)$$

$$= \exp(it\bar{\mu} - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 t^2)$$

$t \in \mathbb{R}$. $\bar{\mu} = \mu_1 + \dots + \mu_n$, $\bar{\sigma}^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2$

よって $S_n \sim N(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$: 正規分布の再生性

→ 和の分布がすぐに求まる.

様々な分布

連続な分布

指数分布 ($E_x(\lambda)$)

$$\text{p.d.f. } f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

($\lambda > 0$: 1秒に λ 回)

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda s} ds = 1 - e^{-\lambda x}$$

~ 単位時間にはある事象が平均 λ 回発生
すると、その事象の発生間隔の分布
(ポアソン分布と関係)

$$\begin{aligned} \text{特性関数 } \phi(t) &= \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} e^{i\lambda x t} dx \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - it} = \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-1} \end{aligned}$$

モーメント母関数

$$\psi(t) = \ln \left(\frac{\lambda}{\lambda - it} \right) = -\ln \left(1 - \frac{it}{\lambda} \right)$$

$$\psi'(t) = \left(\frac{it}{\lambda} \right) \left(1 - \frac{it}{\lambda} \right)^{-1}$$

$$\psi''(t) = \left(\frac{it}{\lambda} \right)^2 \left(1 - \frac{it}{\lambda} \right)^{-2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi'(0) = \frac{it}{\lambda} \longrightarrow k_1 = \frac{1}{\lambda} = \mu \quad (\text{平均}) \\ \psi''(0) = \left(\frac{it}{\lambda} \right)^2 \longrightarrow k_2 = \frac{1}{\lambda^2} \quad (\text{分散}) \\ \psi^{(3)}(0) = 2 \left(\frac{it}{\lambda} \right)^3 \longrightarrow k_3 = \frac{2}{\lambda^3} \\ \psi^{(4)}(0) = 3! \left(\frac{it}{\lambda} \right)^4 \longrightarrow k_4 = \frac{6}{\lambda^4} \end{array} \right. \implies \begin{array}{l} \beta_1 = 2 \\ \beta_2 = 6 \end{array}$$

($\lambda = \text{fitting}$)

ガンマ分布 ($G(\lambda, k)$)

p.d.f. $f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

Note $\Gamma(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$: ガンマ関数

$\Gamma(s+1) = s \Gamma(s)$

n が自然数のとき $\Gamma(n) = (n-1)!$, $\Gamma(1) = 1$

$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = (n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2}) \dots \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

特性関数

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \int_0^\infty \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\lambda x} e^{itx} dx \\ &= \frac{\lambda^k}{(\lambda - it)^k} \cdot \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^\infty ((\lambda - it)x)^{k-1} e^{-(\lambda - it)x} (\lambda - it) dx \\ &= \frac{\lambda^k}{(\lambda - it)^k} = \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-k} \end{aligned}$$

$X_j \sim \text{Exp}(\lambda)$ ($j=1, \dots, k$) 互いに独立 とおす

$S_k = X_1 + \dots + X_k$ の c.f. は

$\phi(t) = \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-k}$: ガンマ分布の特性関数
 $G(\lambda, k)$

→ 単位時間あたり平均 λ 回発生する事象が

k 回起きるまでの時間 (指数分布の和はガンマ分布)

モーメント母関数 $\psi(t) = -k \ln\left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)$

$k_1 = \frac{k}{\lambda}$

$k_3 = \frac{2k}{\lambda^3}$

$k_2 = \frac{k}{\lambda^2}$

$k_4 = \frac{6k}{\lambda^4}$

$\beta_1 = \frac{2}{k}$

$\beta_2 = \frac{6}{k}$

$k \rightarrow \infty$

$\beta_1 \rightarrow 0, \beta_2 \rightarrow 0$

(正規分布に近づく)

$\frac{X - \frac{k}{\lambda}}{\sqrt{k/\lambda^2}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$

χ^2 分布 (カイ二乗分布)

$G(\frac{1}{2}, \frac{n}{2})$ を自由度 n の χ^2 -分布 と書く。

統計学によく現れる。

使用所: (正規分布と χ^2 分布の関係)

$X \sim N(0, 1)$: 標準正規分布

$Y = X^2$ の分布は $G(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ に従う

--- 自由度1の χ^2 分布

$X_j \sim N(0, 1)$ ($j=1, \dots, k$) (i.i.d.) なら

$Y = X_1^2 + \dots + X_k^2$ は $G(\frac{1}{2}, \frac{k}{2})$ に従う。

--- 自由度 k の χ^2 分布

(Proof) • $k=1$ のとき. $X \sim N(0, 1)$ なら. 標準正規分布の p.d.f.

$$F(y) = P(X^2 \leq y) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} p(x) dx = 2 \int_0^{\sqrt{y}} p(x) dx$$

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{d}{dy} F(y) = \frac{d}{dy} \left(2 \int_0^{\sqrt{y}} p(x) dx \right) \quad \frac{\frac{1}{2}}{P(\frac{1}{2})} \\ &= \frac{d\sqrt{y}}{dy} \cdot 2 p(\sqrt{y}) = \frac{1}{\sqrt{y}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}} \right) \\ &= \frac{(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}}{P(\frac{1}{2})} \cdot y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y} \end{aligned}$$

→ $G(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ の p.d.f.

• $k > 1$ のとき.

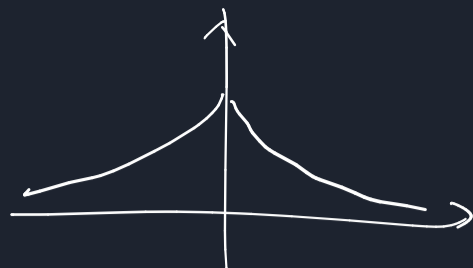
$Y = X_1^2 + \dots + X_k^2$ の特性関数:

$$\phi(t) = \left[(1 - 2it)^{-\frac{1}{2}} \right]^k = (1 - 2it)^{-\frac{k}{2}}$$

⇒ $G(\frac{1}{2}, \frac{k}{2})$ の特性関数: 自由度 k の χ^2 分布

- Cauchy 分布 (コシキ分布)

p.d.f. $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2+x^2}$



$$E[|x|] = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{a^2+x^2} dx$$
$$= \frac{2a}{2\pi} \left[\ln(a^2+x^2) \right]_0^{\infty}$$

→ 有限に確定しない

$E[X]$ は存在しない (非可積分)

c.f. : $\phi(t) = \exp(-a|t|)$

- Γ -分布 (Be(a,b))

p.d.f. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} & (0 < x < 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

a, b は Γ -分布 (形状母数)

Note $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$: Γ -関数

平均: $\mu = \frac{a}{a+b}$

分散: $\sigma^2 = \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}$

実は $X \sim G(a,1), Y \sim G(b,1) \Rightarrow \frac{X}{X+Y} \sim Be(a,b)$
(独立)

⇒ Γ 分布の事前分布に使われることがある。

○ 離散分布

- 二項分布 (省略)

- Poisson分布 ($P_0(\lambda)$)

$$\text{p.m.f. } f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$
$$(x=0, 1, 2, \dots)$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = 1$$

← $\sum_{x \rightarrow \infty} f(x)$

特性関数

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = \underline{\underline{\exp(\lambda(e^{it} - 1))}} \end{aligned}$$

モーメント母関数

$$\psi(t) = \ln \phi(t) = \lambda(e^{it} - 1)$$

$$\psi'(t) = i\lambda e^{it}$$

$$\psi''(t) = (i)^2 \lambda e^{it}$$

$$\psi^{(k)}(t) = (i)^k \lambda e^{it}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} k_1 = \lambda \\ k_2 = \lambda \\ \vdots \\ k_k = \lambda \quad (\forall k) \end{cases}$$

$$\longrightarrow \beta_1 = \frac{1}{i\lambda}, \beta_2 = \frac{1}{\lambda}$$

事象の発生間隔が指数分布に従うとき

単位時間あたり発生する事象の数の分布

X_1, X_2, \dots : 独立な指数分布 ($E_x(\lambda)$), 客の到着間隔

客が k 人以上来た: $X_1 + \dots + X_k \leq t$

つまり, $Y \sim G(\lambda, k)$ とし $Y \leq t$ 2. 到着確率

事象の発生間隔が指数分布に従うとき、

単位時間あたりに発生する事象の数の分布

X_1, X_2, \dots : 独立な指数分布 ($E_x(\lambda)$)、客の到着間隔

客が k 人以上来た: $X_1 + \dots + X_k \leq t$

つまり、 $Y \sim G(\lambda, k)$ と $Y \leq t$ である確率

$$\int_0^t \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} y^{k-1} e^{-\lambda y} dy$$

$$= \int_0^t -\frac{\lambda^{k-1}}{\Gamma(k)} y^{k-1} \frac{d}{dy}(e^{-\lambda y}) dy$$

$$= \left[-\frac{\lambda^{k-1}}{\Gamma(k)} y^{k-1} e^{-\lambda y} \right]_0^t + \int_0^t \frac{\lambda^{k-1}}{\Gamma(k-1)} e^{-\lambda y} y^{k-2} dy$$

$$\begin{array}{l} \parallel \\ -\frac{\lambda^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{-\lambda t} \end{array} \quad \leftarrow \frac{k-1}{\Gamma(k)} = \frac{1}{\Gamma(k-1)}$$

$$= 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} = 1 - \underbrace{F(k-1)}$$

Poisson分布の分布関数

$$\text{つまり } P(k人以上) = 1 - F(k-1)$$

$$\Rightarrow P(k-1人以下) = F(k-1) : \text{Poisson分布}$$



一負の二項分布 (NB(r, θ))

コイン投中を r 回、表が出るまでに裏が出る回数 (x) の分布
 (ただし、その 1 回前までは裏 x 回、表 r-1 回と仮定)

r=1 のとき、NB(1, θ) = G(θ) = 幾何分布 と言う

一般のとき、p.m.f
$$f(x) = \binom{r+x-1}{r-1} \theta^{r-1} (1-\theta)^x \theta$$

$$= \binom{r+x-1}{r-1} \theta^r (1-\theta)^x$$
 最後 1 回成功

特性関数

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx} \binom{r+x-1}{r-1} \theta^r (1-\theta)^x \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} \binom{r+x-1}{r-1} \theta^r (e^{it}(1-\theta))^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{==>} \left(\frac{1}{1-z}\right)^r &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{r(r+1)\dots(r+x-1)}{x!} z^x \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} \binom{r+x-1}{r-1} z^x \end{aligned}$$

F1.
$$\phi(t) = \theta^r (1 - e^{it}(1-\theta))^{-r}$$
 である。

$$\psi(t) = \ln(\phi(t)) = r \ln(\theta) - r \ln(1 - e^{it}(1-\theta))$$

$$\psi'(t) = -r \frac{-i(1-\theta)e^{it}}{1 - e^{it}(1-\theta)} \xrightarrow{t=0} \mu = r \frac{1-\theta}{\theta}$$

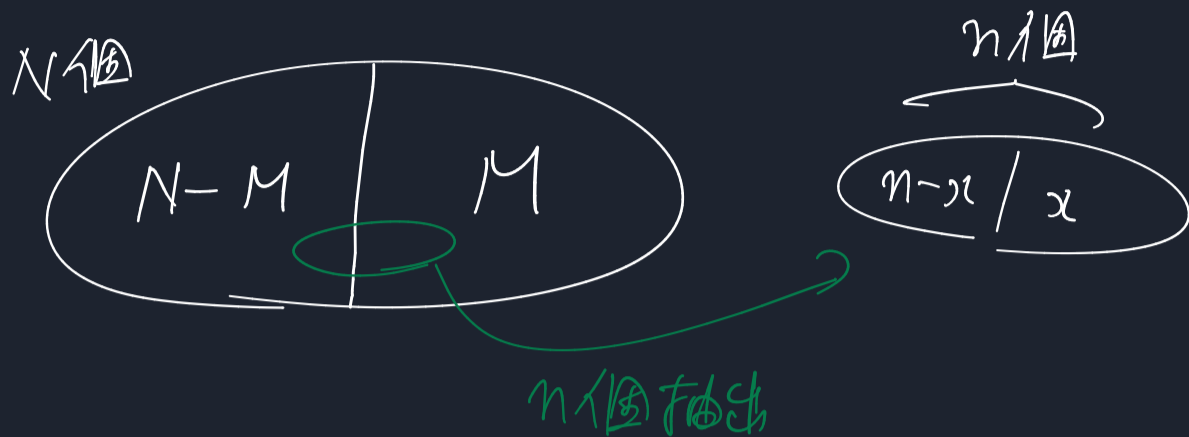
$$\psi''(t) = r \frac{i^2(1-\theta)e^{it}}{(1 - e^{it}(1-\theta))^2} \xrightarrow{t=0} \sigma^2 = r \frac{1-\theta}{\theta^2}$$

(0 < θ < 1, θ ≠ 0 と仮定)

例: クオースリコシクダ - 問題, コイン投げ

超幾何分布 $(H(n, N, M))$

N 個のアイテムに M 個の不良品がある。このうち n 個を非復元抽出した時、その n 個に x 個の不良品がある確率



p.m.f.
$$f(x) = \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$\theta = \frac{M}{N} \ll 1, N \rightarrow \infty \ll n \ll N$. (θ is fixed)

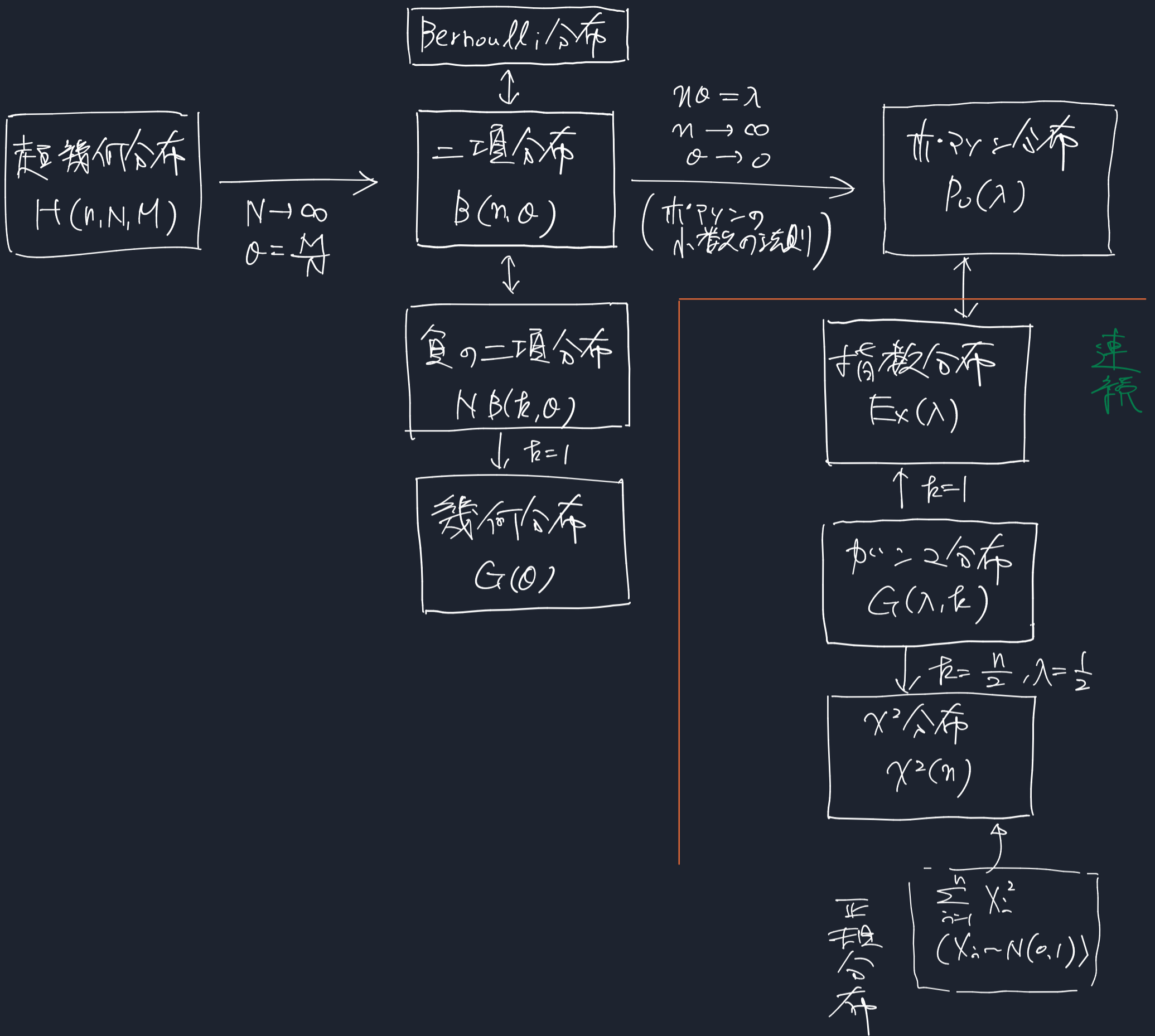
$\rightarrow \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$ (二項分布)

$$f(x) = \frac{M(M-1)\dots(M-x+1)}{x!} \cdot \frac{(N-M)(N-M-1)\dots(N-M-n+x+1)}{(n-x)!}$$

$$\frac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{n!}$$

$$= \binom{n}{x} \frac{M}{N} \cdot \left(\frac{M}{N} - \frac{1}{N}\right) \dots \left(\frac{M}{N} - \frac{x-1}{N}\right) \frac{(1-\frac{M}{N})(1-\frac{M-1}{N}) \dots (1-\frac{M-n+x-1}{N})}{1 \times (1-\frac{1}{N}) \times \dots \times (1-\frac{n-1}{N})}$$

$\xrightarrow[N \rightarrow \infty, M \rightarrow \infty]{\frac{M}{N} = \theta}$ $\binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$



演習問題

(1) X_1, \dots, X_n : 独立.

ψ_i : X_i のモーメント母関数

$S = X_1 + \dots + X_n$ のモーメント母関数は

$$\psi(t) = \psi_1(t) + \dots + \psi_n(t)$$

であることを示せ.

このとき、 S の j 次モーメントは

$$k_j = k_j^{(1)} + \dots + k_j^{(n)}$$

($k_j^{(i)}$ は X_i の j 次モーメント)

であることを確かめよ.

(2) $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ が下半連続とは $\liminf_{y \rightarrow x} f(y) \geq f(x)$ ($\forall x \in \mathbb{R}^d$)

をみたすことを示せ. (同様に f が上半連続 $\Leftrightarrow -f$ が下半連続)

このとき、

f が下半連続 $\Leftrightarrow \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \leq a\}$ が閉集合 ($\forall a \in \mathbb{R}$)

を示せ. \Rightarrow の逆も示せ. 下半連続または上半連続な関数は

可測であることを示せ.

(3) (Ω, \mathcal{F}) 上の可測関数の集合は、単関数を含まない各点収束に閉じて閉じている最小の関数クラスであることを示せ.

(4) $\sigma(X)$ を X が可測になる最小の σ -代数族とする. ($X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$)

$$\text{つまり } \sigma(X^{-1}(B(\mathbb{R}))) = \sigma(\{X^{-1}(A) \mid A \in B(\mathbb{R})\})$$

このとき、 $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が $\sigma(X)/B(\mathbb{R})$ -可測であることを示すための必要十分条件は

ある可測関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて $Y = f(X)$ と書けることを示せ.

(5) X の特性関数の値 $\phi(t)$ が $\forall t \in \mathbb{R}$ で実数

$\Leftrightarrow X$ と $-X$ は同じ分布

(6) 特性関数 ϕ が $\int |\phi(t)| dt < \infty$ のとき.

この分布は密度関数 $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-itx} \phi(t) dt$ を持つことを示せ.

(7) 一様分布 $U([a, b])$ の特性関数を求めよ.

(8) $X \sim U([-1, 1])$, $Y \sim U([-1, 1])$ (独立)

のとき, $Z = X + Y$ の特性関数を求めよ.

また, $Z = X + Y$ の分布の確率密度関数を求めよ.

(9) $X, Y =$ 独立

のとき, $X + Y$ と X が同じ分布 Z があるなら

$Y = 0$ (a.s.) Z があることを示せ.